אלגברה לינארית להנדסה – תרגול #14

מרחבי מכפלה פנימית

יהי V מרחב לינארי מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$, אזי פונקציה:

$$\langle \cdot,\cdot \rangle : V\times V \to \mathbb{F} \qquad (\mathbb{F} = \mathbb{R} \quad or \quad \mathbb{C})$$

המקיימת:

1. $\forall u\in V \qquad \langle u,u\rangle \ge 0 \qquad and \qquad \langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u=\bar{0}$
2. $\forall u,v,w\in V \qquad \langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$
3. $\forall u,v\in V \qquad \forall \alpha\in\mathbb{F} \qquad \langle \alpha\cdot u,v\rangle = \alpha\cdot\langle u,v\rangle$
4. $\forall u,v\in V \qquad \langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$

נקראת מכפלה פנימית.

המרחב V בצירוף המכפלה הפנימית נקרא מרחב מכפלה פנימית.

אורתוגונליות

יהי V מרחב מכפלה פנימית, אזי:

1. זוג וקטורים $u,v\in V$ נקראים אורתוגונלים (מאונכים) ביחס למכפלה הפנימית של המרחב, אם מתקיים:

$$\langle u,v\rangle = 0$$

2. זוג וקטורים אורתוגונלים שונים מווקטור האפס, הם בלתי תלויים לינארית.
3. קבוצת וקטורים, $\{v_j\}_{j=1}^{n} \subset V$, המקיימת:

$$\forall j \qquad v_j \ne \bar{0} \qquad \text{and} \qquad \forall i\ne j \qquad \langle v_i,v_j\rangle = 0$$

נקראת קבוצה אורתוגונלית.

4. כל קבוצה אורתוגונלית, $\{v_j\}_{j=1}^{n} \subset V$, היא בת"ל, ובפרט אם מתקיים כי:

$$V = Sp\{v_1,v_2\dots v_n\}$$

אזי היא נקראת בסיס אורתוגונלי.

אורתונורמליות

יהי V מרחב מכפלה פנימית, אזי:

1. לכל $v\in V$ מוגדרת נורמה (אורך או מרחק מהראשית), המוגדרת ע"פ:

$$\|v\| := \sqrt{\langle v,v\rangle} \ge 0$$

2. קבוצה אורתוגונלית, $\{v_j\}_{j=1}^{n} \subset V$, המקיימת:

$$\forall j \qquad \|v_j\| = 1$$

נקראת קבוצה אורתונורמלית, ובפרט אם מתקיים גם:

$$V = Sp\{v_1,v_2\dots v_n\}$$

אזי היא נקראת בסיס אורתונורמלי.

תהליך גרם-שמידט

יהי $B:=\{v_1,v_2,v_3,\dots v_n\}$ בסיס כלשהו למרחב מכפלה פנימית V, אזי ניתן לבנות ממנו בסיס אורתונורמלי בעזרת תהליך גרם-שמידט:

1. $u_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}$
2. $u_2=\frac{w_2}{\|w_2\|} \quad , \quad w_2:=v_2-\langle v_2,u_1\rangle\cdot u_1$
3. $u_3=\frac{w_3}{\|w_3\|} \quad , \quad w_3:=v_3-\langle v_3,u_1\rangle\cdot u_1-\langle v_3,u_2\rangle\cdot u_2$

$\vdots$

n. $u_n=\frac{w_n}{\|w_n\|} \quad , \quad w_n:=v_n-\sum_{j=1}^{n-1}\langle v_n,u_j\rangle\cdot u_j$

מטריצות אורתוגונליות ואוניטריות

1. מטריצה ממשית וריבועית U נקראת אורתוגונלית אם היא מקיימת:
$$U^T\cdot U=I$$

2. מטריצה מרוכבת וריבועית U נקראת אוניטרית אם היא מקיימת:
$$U^*\cdot U=I$$

מסקנות מההרצאה:

אם U אורתוגונלית (אוניטרית), אזי:

1. U לא סינגולרית ובפרט $U^{-1}=U^T$ $\quad\left(U^{-1}=U^*\right)$
2. עמודות/שורות U הן בסיס אורתונורמלי ל- $\mathbb{R}^n$ $\left(\mathbb{C}^n\right)$ ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית.